

Anwendung der linealen Ausdehnungslehre

von Grassmann

auf die Theorie der Determinanten

vom

Gymnasiallehrer Dr. Friedrich Niemöller.

Wissenschaftliche Beilage

zum

Programm des Ratsgymnasiums

Ostern 1891.



Osnabrück.
Druck von J. G. Kisling.
1891.

1891. Progr. Nr. 309.

Anwendung der linealen Ausdehnungslehre

von Grassmann

auf die Theorie der Determinanten.

§. 1.

In vorliegender Arbeit habe ich versucht, die Theorie der Determinanten in ihren Hauptzügen nach den Principien der Grassmannschen Ausdehnungslehre zu entwickeln. Die im folgenden Paragraphen angegebenen hierbei in Betracht kommenden Rechnungsregeln, welche der linealen Ausdehnungslehre entnommen sind, lassen zwar einen gewissen Zusammenhang zwischen dieser Methode und der älteren in so vollendeter Weise von R. Baltzer dargestellten erkennen, doch wird ihre grosse Verschiedenheit schon bei den Beweisen der einfachsten Lehrsätze der Determinantentheorie deutlich hervortreten. Der Umstand, dass die von Weierstrass angewandte Bezeichnungsweise einer Determinante mit der von Grassmann in naher Beziehung steht (vergl. §. 3), wird unserer Methode sicherlich zur Empfehlung gereichen. Weierstrass bildet bekanntlich zur Bezeichnung der Determinante n^{ten} Grades

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die folgenden n Gleichungen

$$y_k = a_{k1}\, x_1 + \ldots + a_{kn}\, x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und schreibt die Determinante in der Form

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & . & . & . & y_n \\ x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \end{pmatrix}$$

Ausser der alten im wesentlichen von Leibnitz herrührenden Bezeichnung benutzen wir noch die von Kronecker

$$A = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

§. 2.

Die im folgenden zur Anwendung gelangenden Rechnungsregeln beziehen sich zumeist auf die kombinatorischen Faktoren erster Ordnung, die mit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bezeichnet werden sollen.

Für die Addition und Subtraktion solcher Grössen gilt bekanntlich das gewöhnliche Rechnungsverfahren. Für die Multiplikation gelten dagegen folgende Regeln, die teils Definitionen, teils bewiesene Sätze sind:

I. Wenn in einem Produkt $e_1\ e_2\ e_3 \ldots$ zwei aufeinander folgende Grössen vertauscht werden, so nimmt das Produkt den entgegengesetzten Wert an. Z. B. ist $e_1\ e_2\ e_3 \ldots = -\ e_2\ e_1\ e_3 \ldots$

Hieraus ergiebt sich die wichtige Folgerung:

II. Sind irgend zwei kombinatorische Faktoren einander gleich, so ist das Produkt null.

Setzt man in obigem Beispiel $e_1 = e_2$, so ist $e_1\, e_1\, e_3 \ldots = - e_1\, e_1\, e_3 \ldots$, also muss das Produkt null sein.

Aus I. leitet man noch den Satz ab:

III. Wenn ein Faktor mit einem andern vertauscht wird, während die übrigen ihre Plätze behalten, so ändert das Produkt sein Zeichen.

Beispiel: $e_1\ e_2\ e_3\ e_4 \ldots = -\ e_4\ e_2\ e_3\ e_1 \ldots$

IV. Ein Zahlfaktor, welcher irgend einem Faktor eines kombinatorischen Produkts zugeordnet ist, kann auch einem beliebigen andern oder dem Produkt zugeordnet werden.

Ist α eine Zahlgrösse, so ist

$$\alpha\ (e_1\ e_2\ e_3 \ldots) = (\alpha e_1)\ e_2\ e_3 \ldots = e_1\ (\alpha e_2)\ e_3 \ldots$$

V. Für die Multiplikation eines Aggregats mit einem Ausdruck gilt das gewöhnliche Verfahren.

Beispiel: $e_1\ (e_2 \pm e_3) = e_1\ e_2 \pm e_1\ e_3 = -\ e_2\ e_1 \mp e_3\ e_1 = -\ (e_2 \pm e_3)\ e_1$

Von grosser Wichtigkeit sind noch folgende beiden Sätze:

VI. Ein Produkt bleibt ungeändert, wenn ein Faktor um beliebige Vielfache der übrigen Faktoren vermehrt oder vermindert wird.

Beispiel: $e_1\ e_2\ e_3 = e_1\ e_2\ (e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2)$

In diesem Beispiel sind α und β Zahlgrössen. Führt man nämlich rechts die Multiplikation aus, so verschwinden die beiden letzten Produkte nach II.

VII. Ein Produkt aus n kombinatorischen Faktoren bleibt ungeändert, wenn i Faktoren desselben um beliebige Vielfache der übrigen $n - i$ Faktoren vermehrt oder vermindert werden.

Beispiel: $e_1\ (e_2 \pm \alpha e_1)\ (e_3 \pm \beta e_1) = e_1\ e_2\ e_3$

VIII. Sind $p_1, p_2, \ldots$ Vielfachensummen der Grössen e, also $p_i = \alpha_i e_1 + \beta_i e_2 + \ldots$ worin $\alpha_i, \beta_i, \ldots$ Zahlgrössen bedeuten, so gelten für die Grössen p dieselben Regeln I bis VII wie für die Grössen e.

Nach diesen Regeln ist das Produkt

$$(e_1 + \alpha e_2 + \alpha^2 e_3)(e_1 + \beta e_2 + \beta^2 e_3) = (\beta - \alpha) e_1 e_2 + (\beta^2 - \alpha^2) e_1 e_3 + (\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta) e_2 e_3$$
$$= (\beta - \alpha)[e_1 e_2 + (\alpha + \beta) e_1 e_3 + \alpha\beta e_2 e_3]$$

Multipliziert man dieses Product noch mit $e_1 + e_2 \gamma + e_3 \gamma^2$, so ist

$$(e_1 + \alpha e_2 + \alpha^2 e_3)(e_1 + \beta e_2 + \beta^2 e_3)(e_1 + \gamma e_2 + \gamma^2 e_3) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) e_1 e_2 e_3$$

§. 3.

Um zu einer Definition der Determinante A (vergl. §. 1) zu gelangen, multipliziere man die Elemente der ersten Kolonne mit e_1, die der zweiten mit e_2 u. s. w. und setze

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11} e_1 + \ldots + a_{1n} e_n \\ p_2 &= a_{21} e_1 + \ldots + a_{2n} e_n \\ &\ldots \qquad\qquad \ldots \\ p_n &= a_{n1} e_1 + \ldots + a_{nn} e_n \end{aligned}$$

Die Determinante n^{ten} Grades der Elemente a_{ik} soll dann der Faktor von $e_1 e_2 \ldots e_n$ in dem Produkt $p_1 p_2 \ldots p_n$ sein. Wenn also das Produkt $p_1 \ldots p_n$ mit P und $e_1 \ldots e_n$ mit E bezeichnet wird, so ist $AE = P$ und $A = \frac{P}{E}$

Für die Determinante 2ten Grades hat man $p_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2$, $p_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2$, demnach ist $p_1 p_2 = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) e_1 e_2$, also $A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Wir werden der Kürze wegen p_i die i^{te} Zeile der Determinante A nennen.

Lässt man alle Elemente der ersten Zeile ausser a_{11} verschwinden und setzt noch $a_{11} = 1$, so erhält man $A = \frac{e_1 p_2 \ldots p_n}{e_1 e_2 \ldots e_n}$

Ein Fortheben von e_1 ist hier nur dann gestattet, wenn die Zeilen $p_2, \ldots, p_n$ von e_1 unabhängig sind. Verwandelt man also das Produkt $e_1 p_2 \ldots p_n$ nach §. 2, VII in das Produkt $e_1 (p_2 - a_{21} e_1)(p_3 - a_{31} e_1) \ldots (p_n - a_{n1} e_1)$, so sind sämtliche Faktoren in den Klammern von e_1 unabhängig, demnach $\frac{e_1 p_2 \ldots p_n}{e_1 e_2 \ldots e_n} = \frac{(p_2 - a_{21} e_1) \ldots (p_n - a_{n1} e_1)}{e_2 \ldots e_n}$

§. 4.

Unmittelbar aus obiger Definition für A ergeben sich nach den Regeln von §. 2 folgende Sätze:

I. Wenn in einer Determinante zwei Zeilen vertauscht werden, so wechselt die Determinante das Zeichen.

Es ist $AE = p_1 p_2 \ldots p_n$. Vertauscht man z. B. die erste und zweite Zeile, so gilt für die neue Determinante A' die Gleichung $A'E = p_2 p_1 \ldots p_n$. Nach §. 2, I ist also $A'E = -AE$ oder $A' = -A$.

II. Wenn zwei Zeilen übereinstimmen, so ist die Determinante identisch null. Der Beweis folgt sofort aus §. 2, II.

III. Wenn alle Elemente einer Zeile null sind, so ist auch die Determinante null. Ist p_i null, so ist auch AE und A null.

IV. Um die Determinante mit einem Faktor zu multiplizieren, hat man alle Elemente einer Zeile mit demselben zu multiplizieren.

Ist α der Faktor, so ist $\alpha A E = (\alpha p_1)\, p_2 \ldots p_n$; αp_1 ist aber $= \alpha a_{11}\, e_1 + \ldots + \alpha a_{1n}\, e_n$

V. Der Wert einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Zeile die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Faktor multiplizierten Elemente einer anderen Zeile addiert. Es ist

$$AE = p_1\, p_2 \ldots p_n = (p_1 + \alpha p_2)\, p_2 \ldots p_n \quad (§. 2, VI).$$

Die Elemente der Zeile $p_1 + \alpha p_2$ sind aber $a_{11} + \alpha a_{21}$, $a_{12} + \alpha a_{22}, \ldots$

VI. Wenn die Elemente einer Zeile Aggregate von m Gliedern sind, so ist die Determinante das Aggregat von m Determinanten. Besteht z. B. jedes Eliment a_{1i} der ersten Zeile aus den Gliedern $\alpha_i + \beta_i + \ldots$, so erhält man $p_1 = p_1' + p_1'' + \ldots$; $p_1', p_1'', \ldots$ sind die Summen $\alpha_1\, e_1 + \ldots + \alpha_n\, e_n$, $\beta_1\, e_1 + \ldots + \beta_n\, e_n, \ldots$ AE geht also über in $(p_1' + p_1'' + \ldots)\, p_2 \ldots p_n$ oder in $A'E + A''E + \ldots$. A' geht aus A hervor, indem man die Elemente der ersten Zeile in A beziehentlich durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ersetzt u. s. w.

§. 5.

Differential einer Determinante. Wenn alle Elemente a_{ik} sich ändern, so ist

$$(A + dA)\, E = (p_1 + dp_1)\,(p_2 + dp_2) \ldots (p_n + dp_n)$$

demnach

(1) $dA . E = dp_1 . p_2\, p_3 \ldots p_n + p_1\, dp_2 . p_3 \ldots p_n + \ldots + p_1\, p_2 \ldots dp_n$

Da $dp_1 = da_{11} . e_1 + da_{12} . e_2 + \ldots + da_{1n} . e_n$ ist, so ergiebt sich folgender Satz:

Das vollständige Differential einer Determinante A ist eine Summe von n Determinanten, die man aus A ableitet, indem man die Elemente je einer Zeile durch deren Differentiale ersetzt. Um eine bequeme Form des Differentials zu erhalten, wollen wir eine auch im folgenden häufig benutzte Bezeichnung anwenden.

Wir zerlegen $p_1\, p_2 \ldots p_n$ in $p_i . p_1\, p_2 \ldots p_{i-1}\, (\;)\, p_{i+1} \ldots p_n$, indem wir p_i an die erste Stelle bringen und an die Stelle von p_i eine leer gelassene Klammer setzen. Das alle n Zeilen von A ausser der $i$ten Zeile enthaltende Produkt $p_1 \ldots p_{i-1}\, (\;)\, p_{i+1} \ldots p_n$ werde mit P_i bezeichnet, so ist $P = p_i\, P_i$. Setzen wir statt p_i einen anderen kombinatorischen Faktor erster Ordnung, z. B. p, so ist

$$p\, P_i = p p_1 \ldots p_{i-1}\, (\;)\, p_{i+1} \ldots p_n = p_1 \ldots p_{i-1}\, p p_{i+1} \ldots p_n$$

Das Produkt mit 2 Lücken

$$P_{ik} = p_1 \ldots p_{i-1}\, (\;)\, p_{i+1} \ldots p_{k-1}\, (\;)\, p_{k+1} \ldots p_n$$

sei definiert durch $p_i\, p_k\, P_{ik} = P$

Unter Anwendung dieser Bezeichnung findet man für das Differential

$$dA . E = dp_1 . P_1 + dp_2 . P_2 + \ldots + dp_n\, P_n$$

An dieser Stelle möge noch der Satz von Hesse bewiesen werden:

Die Determinante eines Systems, dessen Zeilen n gegebene Funktionen von x und deren 1te, 2te, . . . , $(n-1)$te Differentialcoefficienten sind, hat die Eigenschaft, mit y^n multipliziert zu werden, wenn man die gegebenen Funktionen durch ihre Produkte mit einer beliebigen Funktion y von x ersetzt.

Es seien $y_1, \ldots, y_n$ die gegebenen Funktionen und

$$\begin{array}{ll} p & = y_1 \; e_1 + \ldots + y_n \; e_n \\ p' & = y_1' \; e_1 + \ldots + y_n' \; e_n \\ . & . \quad . \qquad . \quad . \quad . \\ p^{(n-1)} & = y^{(n-1)} e_1 + \ldots + y^{(n-1)} e_n \end{array}$$

so ist $A = \frac{pp' \ldots p^{(n-1)}}{E}$ die Determinante. Ersetzt man die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ durch ihre Produkte mit einer beliebigen Funktion y, so hat man für die neue Determinante A_1

$$A_1 E = py \; (py)' \ldots (py)^{(n-1)}$$

Nun ist aber $(py)' = p'y + py'$, $(py)'' = p''y + 2p'y' + py''$, . . . Wendet man §. 2, VI wiederholt an, so findet man

$$A_1 E = y^n A E \text{ oder } A_1 = A y^n$$

Differentiiert man noch die Gleichung

$$AE = pp' \ldots p^{(n-1)}$$

nach x, so erhält man $\frac{dA}{dx} = \frac{pp' \ldots p^{(n-2)} \; p^{(n)}}{E}$

§. 6.

Es soll nun der Satz bewiesen werden, dass zwei Determinanten der Art, dass die Zeilen der einen mit den Kolonnen der anderen übereinstimmen, einander gleich sind. Wir multiplizieren in der Determinante A (§. 1) die Elemente der ersten Zeile mit dem kombinatorischen Faktor erster Ordnung ε_1, die der zweiten mit ε_2 u. s. w. und setzen

$$(1) \qquad \begin{array}{l} \pi_1 = a_{11} \; \varepsilon_1 + a_{21} \; \varepsilon_2 + \ldots a_{n1} \; \varepsilon_n \\ \pi_2 = a_{12} \; \varepsilon_1 + a_{22} \; \varepsilon_2 + \ldots a_{n2} \; \varepsilon_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \pi_n = a_{1n} \; \varepsilon_1 + a_{2n} \; \varepsilon_2 + \ldots a_{nn} \; \varepsilon_n \end{array}$$

Bezeichnet man noch $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ mit H und das Produkt aus den n Kolonnen $\pi_1 \ldots \pi_n$ mit Π, so ist die Identität von $\frac{\Pi}{H}$ und $\frac{P}{E}$ nachzuweisen.

Wir multiplizieren die Gleichungen (1) beziehentlich mit $e_1, \ldots, e_n$ und zwar an erster Stelle, so findet man durch Addition

$$(2) \qquad e_1 \; \pi_1 + \ldots + e_n \; \pi_n = p_1 \; \varepsilon_1 + \ldots + p_n \; \varepsilon_n$$

In dieser Gleichung sind die Glieder kombinatorische Faktoren 2ter Ordnung, deren Vertauschung keinen Zeichenwechsel hervorbringt, denn es ist $e_i \; \pi_i \; e_k \; \pi_k = e_k \; \pi_k \; e_i \; \pi_i$. Dagegen verschwinden auch hier die Produkte, welche zwei gleiche Faktoren enthalten.

Erheben wir beide Seiten von (2) zur $n$ten Potenz, so findet man

$$e_1 \pi_1 . e_2 \pi_2 \ldots e_n \pi_n = p_1 \varepsilon_1 . p_2 \varepsilon_2 \ldots p_n \varepsilon_n$$

hieraus folgt $E\Pi = PH$ oder durch Division mit EH

$$(3) \qquad \frac{\Pi}{H} = \frac{P}{E}$$

Demnach haben die in §. 4 und §. 5 zunächst für die Zeilen der Determinante aufgestellten Sätze auch noch Gültigkeit für die Kolonnen derselben.

Aus (2) ergeben sich noch, wenn man beide Seiten zur 2ten, 3ten . . . Potenz erhebt, folgende Identitäten

$$(4) \qquad \Sigma\, e_r\, e_{r'}\, \pi_r\, \pi_{r'} = \Sigma\, p_r\, p_{r'}\, \varepsilon_r\, \varepsilon_{r'}$$

$$(5) \qquad \Sigma\, e_r\, e_{r'}\, e_{r''}\, \pi_r\, \pi_{r'}\, \pi_{r''} = \Sigma\, p_r\, p_{r'}\, p_{r''}\, \varepsilon_r\, \varepsilon_{r'}\, \varepsilon_{r''}$$

Die Glieder dieser Gleichungen werden dadurch gebildet, dass man bei (4) für $r\ r'$ alle Kombinationen 2ten Grades, bei (5) für $r\ r'\ r''$ alle Kombinationen 3ten Grades der Zahlen $1, \ldots, n$ setzt.

Überhaupt ist immer für ein beliebiges x

$$(1 + x e_1 \pi_1)(1 + x e_2 \pi_2) \ldots (1 + x e_n \pi_n) = (1 + x p_1 \varepsilon_1)(1 + x p_2 \varepsilon_2) \ldots (1 + x p_n \varepsilon_n)$$

§. 7.

Definition der Subdeterminanten und ihre Adjunkten. Wir können aus der Determinante A (§. 1) partiale oder Subdeterminanten herleiten, indem wir m Zeilen des Quadrats auswählen und von diesen m Kolonnen. Die aus diesen m^2 Elementen gebildete Subdeterminante heisst eine Subdeterminante $m$ten Grades des gegebenen Systems. Wählen wir z. B. die letzten $n-2$ Zeilen und von diesen die letzten $n-2$ Kolonnen, so ist der Quotient $\frac{p_3\, p_4 \ldots p_n}{e_3\, e_4 \ldots e_n}$ die aus diesen Elementen gebildete Determinante, unter der Voraussetzung, dass in den Faktoren $p_3, \ldots, p_n$ die mit e_1 und e_2 multiplizierten Elemente, z. B. in p_3 die Elemente a_{31} und a_{32} null sind. Um uns von dieser Voraussetzung frei zu machen, multiplizieren wir im Zähler und Nenner mit $e_1\, e_2$, so geht obiger Bruch über in

$$A_{1212} = \frac{e_1\, e_2\, p_3 \ldots p_n}{E} = \frac{e_1\, e_2\, P_{12}}{E}$$

(Über die Bedeutung von P_{12} vergl. §. 5). Wir dürfen in diesem Bruch die Faktoren p in der ursprünglichen Bedeutung nehmen, da die Glieder, welche e_1 und e_2 enthalten, nach §. 2, VII ohne Einfluss auf das Produkt sind. Ist $k\,k'$ irgend eine Kombination 2ten Grades der Zahlen 1 bis n, so ist

$$A_{12kk'} = \frac{e_k\, e_{k'}\, P_{12}}{E}$$

die Subdeterminante $(n-2)$ten Grades, welche die letzten $n-2$ Zeilen der Determinante und $n-2$ ihrer Kolonnen enthält, nämlich alle ausser der $k$ten und k'ten. Zu der gewählten Zeilenkombination giebt es $\binom{n}{2}$ Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades. Wählt man

statt der letzten $n-2$ Zeilen irgend eine andere Kombination, indem man die i^{te} und i'^{te} weglässt, so ist die entsprechende Subdeterminante

$$(1) \qquad A_{ii'kk'} = \frac{e_k\, e_{k'}\, P_{ii'}}{E}$$

Es giebt also $\binom{n}{2}^2$ Subdeterminanten $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades. Für die Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades hat man

$$(2) \qquad A_{ik} = \frac{e_k\, P_i}{E}$$

aber auch nach §. 6

$$(3) \qquad A_{ik} = \frac{\varepsilon_i\, \Pi_k}{H}$$

Um die Identität beider Subdeterminanten zu beweisen, geht man von der Gleichung aus (§. 6, 3)

$$\frac{P}{E} = \frac{\Pi}{H}$$

Es ist hiernach $\dfrac{p_i\, P_i}{E} = \dfrac{\pi_k\, \Pi_k}{H}$ oder

$$\frac{(a_{i_1}\, e_1 + \ldots + a_{ik}\, e_k + \ldots + a_{in}\, e_n)\, P_i}{E} = \frac{(a_{1k}\, \varepsilon_1 + \ldots + a_{ik}\, \varepsilon_i + \ldots + a_{nk}\, \varepsilon_n)\, \Pi_k}{H}$$

Da die Faktoren von a_{ik} einander gleich sein müssen, so sind die Quotienten in (2) und (3) einander gleich. Überhaupt lassen sich alle Subdeterminanten auf doppelte Weise ausdrücken. Für die Subdeterminanten $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades hat man ausser der unter (1) angegebenen Formel noch

$$(4) \qquad A_{ii'kk'} = \frac{\varepsilon_i\, \varepsilon_{i'}\, \Pi_{kk'}}{H}$$

Den Beweis für die Gleichheit beider Quotienten in (1) und (4) führt man in ähnlicher Weise wie den vorigen, indem man von der eben bewiesenen Gleichung ausgeht

$$\frac{e_k\, P_i}{E} = \frac{\varepsilon_i\, \Pi_k}{H}$$

und P_i zerlegt in $p_{i'}\, P_{ii'}$, Π_k in $\pi_{k'}\, \Pi_{kk'}$.

Um einen bequemen Ausdruck für die Adjunkte zu erhalten, setzen wir $E_i = e_1 \ldots e_{i-1}\,(\;)\,e_{i+1} \ldots e_n$, so dass z. B. $p_k\, E_i = e_1 \ldots e_{i-1}\, p_k\, e_{i+1} \ldots e_n$ ist. Unter der Adjunkte der Subdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades A_{ik} verstehen wir dann die die Elemente von A im ersten Grade enthaltende Determinante $\dfrac{p_i\, E_k}{E}$, welche identisch gleich der Determinante $\dfrac{\pi_k\, H_i}{H}$ ist. Wie sofort ersichtlich, ist diese Adjunkte gleich a_{ik}. Für die Adjunkte der Subdeterminante $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $A_{ii'kk'}$ hat man die beiden Ausdrücke, welche die Elemente von A im 2ten Grade enthalten

$$\text{adj}\; A_{ii'kk'} = \frac{p_i\, p_{i'}\, E_{kk'}}{E} \text{ und } \frac{\pi_k\, \pi_{k'}\, H_{ii'}}{H}$$

So ergeben sich die Formeln

$$(5) \qquad A_{ik} = \frac{e_k\, P_i}{E} = \frac{\varepsilon_i\, \Pi_k}{H}\,; \quad \text{adj}\, A_{ik} = \frac{p_i\, E_k}{E} = \frac{\pi_k\, H_i}{H} = a_{ik}$$

$$(6) \qquad A_{ii'kk'} = \frac{e_k\, e_{k'}\, P_{ii'}}{E} = \frac{\varepsilon_i\, \varepsilon_{i'}\, \Pi_{kk'}}{H}\,; \quad \text{adj}\, A_{ii'kk'} = \frac{p_i\, p_{i'}\, E_{kk'}}{E} = \frac{\pi_k\, \pi_{k'}\, H_{ii'}}{H}$$

Die Formeln für die Subdeterminanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades und ihre Adjunkten sind hiernach leicht zu bilden.

§. 8.

Entwickelung einer Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen. Es ist $\frac{p_i\, P_i}{E} = A$, dagegen $\frac{p_k\, P_i}{E} = 0$, wenn k von i verschieden ist, denn in diesem Falle enthält P_i den Faktor p_k. (§. 3, II).

Setzt man nach Kronecker $\delta_{ik} = 0$ oder $= 1$, je nachdem i von k verschieden oder $i = k$ ist, so ist also

$$\frac{p_k\, P_i}{E} = \delta_{ik}\, A$$

Da $p_k = a_{k_1}\, e_1 + \ldots + a_{kn}\, e_n$, so folgt aus vorstehender Gleichung nach (§. 7, 2)

$$(1) \qquad a_{k_1}\, A_{i_1} + a_{k_2}\, A_{i_2} + \ldots + a_{kn}\, A_{in} = \delta_{ik}\, A$$

$$\text{oder} \ \sum_{r=1}^{n} A_{ir}\ \text{adj}\ A_{kr} = \delta_{ik}\, A$$

Geht man von der Gleichung aus

$$\frac{\pi_k\, \Pi_i}{H} = \delta_{ik}\, A$$

so findet man nach §. 7, 3

$$(2) \qquad a_{1k}\, A_{1i} + a_{2k}\, A_{2i} + \ldots + a_{nk}\, A_{ni} = \delta_{ik}\, A$$

$$\text{oder} \ \sum_{r=1}^{n} A_{ri}\ \text{adj}\ A_{rk} = \delta_{ik}\, A$$

§. 9.

Die Formeln des §. 8 lassen vermuten, dass auch für die Subdeterminanten $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades folgender Satz gelten muss:

Multipliziert man jede der $\binom{n}{2}$ Subdeterminanten einer Zeilen-Kombination mit ihrer Adjunkte oder mit der Adjunkte der entsprechenden Subdeterminante einer anderen Zeilen-Kombination, so ist die Summe aller dieser $\binom{n}{2}$ Produkte im ersten Falle gleich A, im zweiten Falle null.

Ist $\delta_{ii'kk'} = 0$ oder $= 1$, je nachdem die Kombination ii' gleich der Kombination kk' oder von ihr verschieden ist, so ist die Gleichung zu beweisen

$$(1) \qquad \sum_{rr'} A_{ii'rr'} \text{ adj } A_{kk'rr'} = \delta_{ii'kk'} \; A$$

Für rr' sind alle Kombinationen 2ten Grades der Zahlen 1 bis n zu setzen.

Nach §. 7, 6 ist $A_{ii'rr'} = \dfrac{e_r \, e_{r'} \, P_{ii'}}{E}$ und adj $A_{kk'rr'} = \dfrac{\pi_r \, \pi_{r'} \, H_{kk'}}{H}$, demnach ist die linke Seite von (1) gleich $\sum\limits_{rr'} \dfrac{e_r \, e_{r'} \, P_{ii'} \, \pi_r \, \pi_{r'} \, H_{kk'}}{E \cdot H}$

Nach §. 6, 4 können wir diese Summe ersetzen durch $\sum\limits_{rr'} \dfrac{p_r \, p_{r'} \, P_{ii'} \, \varepsilon_r \, \varepsilon_{r'} \, H_{kk'}}{E \cdot H}$

Das Produkt $p_r \, p_{r'} \, P_{ii'}$ ist im allgemeinen null wegen Gleichheit zweier Faktoren p, nur wenn die Kombination $rr' = ii'$ ist, hat es den Wert P. Da noch $\dfrac{P}{E} = A$ ist, so reduziert sich die Summe auf das einzige Glied $\dfrac{A \; \varepsilon_i \; \varepsilon_{i'} \, H_{kk'}}{H}$

Der Faktor von A ist aber $\delta_{ii'kk'}$.

Der entsprechende Satz für Subdeterminanten $(n-m)$ten Grades ist ähnlich zu beweisen.

§. 10.

Es seien $q_1, \ldots, q_n$ die Zeilen einer Determinante $n$ten Grades $|b_{ik}| = B$, also $q_i = \Sigma \, b_{ir} \, e_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$. Werden die kombinatorischen Faktoren $e_1, \ldots, e_n$ durch die Faktoren $e'_1, \ldots, e'_n$ ersetzt, so soll q_i in q'_i und p_i in p'_i übergehen. Ferner seien t_{ir} und u_{rk} die Determinanten $\dfrac{q_i \; P_r}{E}$ und $\dfrac{p'_r \; Q'_k}{E'}$. t_{ir} geht also aus A hervor, indem man die $r$te Zeile derselben durch die $i$te von B ersetzt, und u_{rk} aus B, indem man die $k$te Zeile von B durch die $r$te Zeile von A ersetzt. Es soll nun der Satz von Sylvester bewiesen werden

$$(1) \qquad \sum_r t_{ir} \, u \; = \delta_{ik} \; AB \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Beweis: Es ist

$$(2) \qquad EE' \sum_r t_{ir} \, u_{rk} = \sum_r q_i \; P_r \, p'_r \, Q'_k = \sum_r p'_r \, P \; (-q_i) \; Q'_k$$

Dieser Ausdruck ist nach §. 2, II nicht verschieden von

$$(p_1 + p'_1) \; (p_2 + p'_2) \ldots (p_n + p'_n) \; (-q_i) \; Q'_k$$

Offenbar ist aber das Produkt aus den ersten n Faktoren gleich

$$A \; (e_1 + e'_1) \; (e_2 + e'_2) \ldots (e_n + e'_n)$$

Setzen wir für q_i noch $q'_i - (q_i + q'_i)$, so dürfen wir nach §. 2, VI $q_i + q'_i$ neben q'_i weglassen, da dieser Ausdruck linear aus den n vorhergehenden Faktoren $e_1 + e'_1$, $e_2 + e'_2, \ldots\ldots$ zusammengesetzt ist. Demnach geht (2) über in folgende Gleichung

$$(3) \qquad EE' \sum_r t_{ir} \, u_{rk} = A \; (e_1 + e'_1) \ldots (e_n + e'_n) \; q'_i \; Q'_k$$

Ist i von k verschieden, so ist $q'_i \; Q'_k$ null; ist aber $i = k$, so ist $q'_i \; Q'_k = BE'$, also die rechte Seite von (3) $= AB \; (e_1 + e'_1) \ldots (e_n + e'_n) \; E' = ABEE'$.

§. 11.

Produkt zweier Determinanten n^{ten} Grades.

Die Determinanten, deren Produkt gesucht werden soll, seien

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Wir setzen

$$(1) \quad \begin{array}{l} q_1 = b_{11}\, e_1 + \ldots + b_{n1}\, e_n \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ q_n = b_{1n}\, e_1 + \ldots + b_{nn}\, e_n \end{array} \qquad (2) \quad \begin{array}{l} r_1 = a_{11}\, q_1 + \ldots + a_{1n}\, q_n \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ r_n = a_{n1}\, q_1 + \ldots + a_{nn}\, q_n \end{array}$$

Da die Grössen q kombinatorische Faktoren erster Ordnung sind, so erhält man aus (2) und (1)

$$(3) \qquad r_1\, r_2 \,.\,.\, r_n = A\, q_1\, q_2 \,.\,.\, q_n = A B E$$

Durch Einsetzen der Grössen q aus (1) in (2) ergeben sich aber, wenn man noch einführt

$$c_{ik} = a_{i_1}\, b_{k_1} + a_{i_2}\, b_{k_2} + \ldots + a_{in}\, b_{kn}$$

die Gleichungen für r

$$(4) \quad \begin{array}{l} r_1 = c_{11}\, e_1 + \ldots + c_{1n}\, e_n \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ r_n = c_{n1}\, e_1 + \ldots + c_{nn}\, e_n \end{array}$$

Aus (4) und (3) folgt, dass die Determinante der Elemente c_{ik} das gesuchte Produkt AB ist.*)

§. 12.

Multipliziert man die Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen beziehentlich mit den kombinatorischen Faktoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ und addirt, setzt noch

$$\begin{array}{l} p_1 = a_{11}\, \varepsilon_1 + \ldots + a_{n1}\, \varepsilon_n \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ p_n = a_{1n}\, \varepsilon_1 + \ldots + a_{nn}\, \varepsilon_n \end{array}$$

so ergiebt sich

$$\varepsilon_1\, r_1 + \ldots + \varepsilon_n\, r_n = p_1\, q_1 + \ldots + p_n\, q_n$$

Erhebt man beide Seiten zur n^{ten} Potenz, so hat man sofort

$$(1) \qquad \varepsilon_1\, r_1 \,.\, \varepsilon_2\, r_2 \ldots \varepsilon_n\, r_n = p_1\, q_1 \,.\, p_2\, q_2 \ldots p_n\, q_n$$

$$\text{oder } H\, r_1\, r_2 \ldots r_n = PQ = ABHE$$

Hierdurch ist Gleichung (3) in §. 11 bewiesen.

Auf ähnliche Art kann man einen allgemeinen Satz von Jacobi beweisen, welcher den Multiplikationssatz als speciellen Fall enthält.

---

*) Dieser Beweis ist zuerst von V. Schlegel angegeben.

Wir gehen aus von dem von R. Baltzer angegebenen Symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{1n} & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & . & . & b_{mn} \end{vmatrix}$$

multiplizieren die Zeilen des ersten Systems beziehentlich mit $e_1, e_2, \ldots$, die des zweiten mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und setzen

$$(2) \quad \begin{cases} p_1 = a_{11}\, e_1 + \ldots + a_{m1}\, e_m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_n = a_{1n}\, e_1 + \ldots + a_{mn}\, e_m \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} q_1 = b_{11}\, \varepsilon_1 + \ldots + b_{m1}\, \varepsilon_m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_n = b_{1n}\, \varepsilon_1 + \ldots + b_{mn}\, \varepsilon_m \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} r_1 = a_{11}\, q_1 + \ldots + a_{1n}\, q_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_m = a_{m1}\, q_1 + \ldots + a_{mn}\, q_n \end{cases}$$

Wir multiplizieren die Gleichungen (4) beziehentlich mit $e_1, e_2, \ldots$, so ergiebt die Addition

$$(5) \qquad e_1\, r_1 + \ldots + e_m\, r_m = p_1\, q_1 + \ldots + p_n\, q_n$$

Erhebt man beide Seiten zur $m$ten Potenz, so erhält man für den Fall, dass $m < n$ ist, abgesehen von einem sich weghebenden Zahlfaktor

$$(6) \qquad e_1\, r_1 \ldots e_m\, r_m = \Sigma\, p_u\, q_u\, p_v\, q_v \ldots$$

Für $u\ v \ldots$ sind auf der rechten Seite alle Kombinationen $m$ten Grades der Zahlen 1 bis n zu setzen. Man kann (6) leicht auf die Form bringen

$$(7) \qquad \frac{r_1 \ldots r_m}{H} = \Sigma\, \frac{p_u\, p_v \ldots}{E} \cdot \frac{q_u\, q_v \ldots}{H}$$

Aus (4) und (3) folgt noch, wenn

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + \ldots + a_{in}\, b_{kn}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= c_{11}\, \varepsilon_1 + \ldots + c_{1m}\, \varepsilon_m \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_m &= c_{m1}\, \varepsilon_1 + \ldots + c_{mm}\, \varepsilon_m \end{aligned}$$

Demnach bedeutet die linke Seite von (7) die Determinante $m$ten Grades aus den Elementen c_{ik}, diese ist gleich der Summe von $\binom{n}{m}$ Produkten aus je 2 Determinanten $m$ten Grades von der Form

$$\begin{vmatrix} a_{1u} & a_{1v} & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{mu} & a_{mv} & . & . \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{1u} & b_{1v} & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{mu} & b_{mv} & . & . \end{vmatrix}$$

Ist $m > n$, so ist die Determinante aus den Elementen c_{ik} null.

§. 13.

Wenn die quadratische Form der x

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ a_{ik} = a_{ki} \end{pmatrix}$$

durch die lineare Substitution

$$\begin{array}{l} x_1 = c_{11}\, y_1 + \ldots + c_{1n}\, y_n \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = c_{n1}\, y_1 + \ldots + c_{nn}\, y_n \end{array}$$

in die quadratische Form der y, $\Sigma\, b_{uv}\, y_u\, y_v$, $(u, v = 1, 2, \ldots, n)$, transformiert wird, so ist

$$|b_{ik}| = |a_{ik}|\; |c_{ik}|^2$$

Beweis: Durch obige Substitution geht $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ über in $\Sigma\, a_{ik}\, c_{iu}\, c_{kv}\, y_u\, y_v$, so dass

$$(1) \qquad b_{uv} = \sum_{ik} a_{ik}\, c_{iu}\, c_{kv}$$

Ist $r_t = b_{t1}\, e_1 + \ldots + b_{tn}\, e_n = \sum_{l=1}^{n} b_{tl}\, e_l$, so ist die gesuchte Determinante $|b_{ik}|$ gleich $\frac{r_1 \ldots r_n}{E}$

Nun ist nach (1)

$$r_t = \Sigma\, a_{ik}\, c_{it}\, c_{kl}\, e_l = \sum_i c_{it} \sum_k a_{ik} \sum_l c_{kl}\, e_l \; (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

Führen wir die Substitutionen ein

$$(2) \qquad p_k = \sum_l c_{kl}\, e_l \qquad\qquad (3) \qquad q_i = \sum_k a_{ik}\, p_k$$

so erhält man für r_t die Vielfachensumme $r_t = \sum_i c_{it}\, q_i$. Demnach ist $r_1 \ldots r_n = |c_{ik}|\, q_1 \ldots q_n$, $q_1 \ldots q_n$ ist nach (3) $= |a_{ik}|\, p_1 \ldots p_n$, endlich $p_1 \ldots p_n$ nach (2) $= |c_{ik}|\, E$, demnach ist

$$\frac{r_1 \ldots r_n}{E} = |b_{ik}| = |c_{ik}|^2\, |a_{ik}|$$

§. 14.

Determinante eines Systems von Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Multipliziert man die Gleichung §. 6, 2

$$p_1\, \varepsilon_1 + \ldots + p_n\, \varepsilon_n = e_1\, \pi_1 + \ldots + e_n\, \pi_n$$

an zweiter Stelle mit P_i, so fallen links alle Glieder weg, bis auf $p_i\, P_i\, \varepsilon_i = P\varepsilon_i = A\, E\, \varepsilon_i$, deshalb ist nach §. 7, 5

$$A\, \varepsilon_i = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}\, \pi_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Durch Multiplikation dieser n Gleichungen erhält man

$$A^n H = |A_{ik}|\, \pi_1 \ldots \pi_n = |A_{ik}|\, A\, H$$

Da hiernach $A\, (A^{n-1} - |A_{ik}|)$ identisch null ist, so muss auch für den Fall, dass A verschwindet, $|A_{ik}| = A^{n-1}$ sein.

§. 15.

Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.

Die n von einander unabhängigen linearen Gleichungen seien

$$(1)\qquad \begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1n}\, x_n = u_1 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{nn}\, x_n = u_n \end{array}$$

Wir multiplizieren die Gleichungen beziehentlich mit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ und addieren; wird noch zur Abkürzung gesetzt

$$(2)\qquad \pi_0 = u_1\, \varepsilon_1 + \ldots + u_n\, \varepsilon_n$$

so ergiebt die Addition*)

$$(3)\qquad \pi_1\, x_1 + \ldots + \pi_n\, x_n = \pi_0$$

Diese Gleichung vertritt vollständig die n Gleichungen (1).

Wir multiplizieren (3) an zweiter Stelle mit Π_k, so fallen links alle Glieder weg bis auf $\pi_k\, \Pi_k\, x_k = \Pi x_k = AHx_k$, rechts hat man $\pi_0\, \Pi_k$, folglich ist $AHx_k = \pi_0\, \Pi_k$ und

$$(4)\qquad x_k = \frac{\pi_0\, \Pi_k}{AH} = \frac{\pi_1 \ldots \pi_{k-1}\, \pi_0\, \pi_{k+1} \ldots \pi_n}{\pi_1 \,.\, \pi_{k-1}\, \pi_k\, \pi_{k+1} \ldots \pi_n}$$

x_k ist also ein Bruch, dessen Nenner A ist und dessen Zähler aus A hervorgeht, indem man die Elemente der k^{ten} Kolonne beziehentlich durch $u_1, u_2 \ldots$ ersetzt. Substituiert man den Wert für π_0 aus (2) in (4) und berücksichtigt §. 7, 5, so ist auch

$$A x_k = A_{1k}\, u_1 + \ldots + A_{nk}\, u_n$$

Sind die Grössen $u_1, \ldots, u_n$ in den Gleichungen (1) sämtlich null, so verschwindet π_0 und deshalb sind nach (4) alle x null, so lange A einen geltenden Wert hat. Ist aber die Determinante A null, so lassen sich aus Gleichung (3) die Verhältnisse der x bestimmen.

Diese Gleichung geht über in

$$(5)\qquad \pi_1\, x_1 + \ldots + \pi_n\, x_n = 0.$$

Durch Multiplikation mit $\varepsilon_r\, \Pi_{ik}$ fallen links alle Glieder weg bis auf 2, welche π_i und π_k enthalten. Es ist also

$$x_i\, \pi_i\, \varepsilon_r\, \Pi_{ik} + x_k\, \pi_k\, \varepsilon_r\, \Pi_{ik} = 0.$$

Das erste Glied ist nach der Definition von Π_{ik} (vergl. §. 5) gleich $x_i\, \varepsilon_r\, \Pi_k$, das zweite gleich $-x_k\, \varepsilon_r\, \pi_k\, \Pi_{ik} = -x_k\, \varepsilon_r\, \Pi_i$. Hiernach erhalten wir

$$x_i\, \varepsilon_r\, \Pi_k = x_k\, \varepsilon_r\, \Pi_i$$

Nach §. 7, 5 geht diese Gleichung über in

$$(6)\qquad x_i\, A_{rk} = x_k\, A_{ri}$$

Ist nun eine Unterdeterminante A_{rk} nicht null, so folgt aus (6), indem man x_k einen beliebigen Wert beilegt,

$$x_i = \frac{x_k\, A_{ri}}{A_{rk}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

*) Grassmann, I. Ausdehnungslehre, 1878, p. 71.

Setzt man in (6) für r erst i und dann k, so erhält man aus diesen Gleichungen die bekannte Formel

$$A_{ii}\, A_{kk} = A_{ik}\, A_{ki}$$

Sind alle Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades null und eine Subdeterminante $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades nicht null, so kann man durch Multiplikation von (5) mit $\varepsilon_r\, \varepsilon_{r'}\, \Pi_{ikl}$ leicht eine Gleichung zwischen 3 Unbekannten x aufstellen, worin die Coefficienten derselben Subdeterminanten $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades sind. Das System hat eine Lösung, welche 2 der Grössen x unbestimmt lässt.

§. 16.

Nach dem vorigen Paragraphen können die n homogenen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_1 &= a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ &\;\; \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n &= a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{nn}\, x_n = 0 \end{aligned}$$

nur zusammen bestehen, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$(2) \qquad \pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_n = 0$$

Man kann leicht nachweisen, dass in der That, wenn diese Bedingung erfüllt ist, sich n Grössen x angeben lassen, welche den Gleichungen $u_1 = 0,\ u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ genügen.

Nach einem Satz der l. Ausdehnungslehre folgt aus (2), dass die n Grössen π linear von einander abhängig sind, dass also die Summe $x_1\, \pi_1 + \ldots + x_n\, \pi_n$ null sein muss.

Diese Summe ist aber gleich $u_1\, \varepsilon_1 \ldots + u_n\, \varepsilon_n$. Da die Grössen ε aber von einander unabhängig sind, so müssen sämtliche Grössen u null sein.

Sollen $n+1$ homogene Gleichungen zusammen bestehen, nämlich ausser den Gleichungen (1) noch

$$(3) \qquad u_{n+1} = a_{(n+1)1}\, x_1 + \ldots + a_{(n+1)n}\, x_n = 0$$

so ist den beiden Bedingungen zu genügen

$$(4) \qquad \varepsilon_1\, \pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_n = 0$$

$$(5) \qquad \varepsilon_2\, \pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_n = 0$$

Unter π_i ist hier die Summe $a_{1i}\, \varepsilon_1 + \ldots + a_{(n+1)i}\, \varepsilon_{n+1}$ zu verstehen.

Beweis: Aus (4) folgt, wenn $x_1, \ldots, x_n, y$ Zahlgrössen sind

$$(6) \qquad x_1\, \pi_1 + \ldots + x_n\, \pi_n = y\, \varepsilon_1$$

Ist eine der Zahlgrössen x, z. B. x_1 nicht null, so kann man (5) nach §. 2, VI auf die Form bringen

$$\frac{\varepsilon_2\, (x_1\, \pi_1 + \ldots + x_n\, \pi_n)\, \pi_2 \ldots \pi_n}{x_1} = 0$$

Unter Berücksichtigung von (6) geht diese Gleichung über in $\varepsilon_2\, \varepsilon_1\, y\, \pi_2 \ldots \pi_n = 0$. y muss demnach im allgemeinen null sein. Gleichung (6) geht über in $x_1\, \pi_1 + \ldots + x_n\, \pi_n = 0$. Da diese Summe identisch gleich $u_1\, \varepsilon_1 + \ldots + u_{n+1}\, \varepsilon_{n+1}$ ist und die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nicht linear von einander abhängen, so müssen die Gleichungen erfüllt sein

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0, \ldots, u_{n+1} = 0$$

Die Bedingungen für das Zusammenbestehen von $n+2$ Gleichungen lauten

$$(8) \qquad \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \pi_1 \ldots \pi_n = 0;\ \varepsilon_1\ \varepsilon_3\ \pi_1 \ldots \pi_n = 0;\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \pi_1 \ldots \pi_n = 0.$$

Unter π_i ist hier die Summe $\sum\limits_{r=1}^{n+2} a_{ri}\ \varepsilon_r$ zu verstehen.

Der Beweis wird in ähnlicher Weise wie oben geführt.

Das Zusammenbestehen von $n+m$ homogenen Gleichungen wird durch das Verschwinden von $m+1$ Determinanten bedingt, die man durch Multiplikation des Produkts $\pi_1 \ldots \pi_n$ mit den Kombinationen m^{ten} Grades der Elemente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m+1}$ erhält. π_i ist in diesem Falle $= \sum\limits_{r=1}^{n+m} a_{ri}\ \varepsilon_r$

§. 17.

Einige Beispiele mögen dazu dienen, um die übersichtliche Form hervortreten zu lassen, unter welcher die Resultate bei der Auflösung linearer Gleichungen nach der Methode des §. 15 erscheinen.

I. Die Näherungs-Zähler und Nenner Z_i und N_i des Kettenbruchs

$$\sigma = \lambda_0 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2} - \ldots \frac{\mu_n}{\lambda_n}$$

werden bekanntlich berechnet aus

$$(1)\quad \begin{aligned} Z_0 &= \lambda_0 \\ -Z_1 + \lambda_1\ Z_0 &= \mu_1 \\ Z_2 - \lambda_2\ Z_1 + \mu_2\ Z_0 &= 0 \\ -Z_3 + \lambda_3\ Z_2 - \mu_3\ Z_1 \qquad &= 0 \\ \ldots\ldots \end{aligned} \qquad\qquad (2)\quad \begin{aligned} N_0 &= 1 \\ -N_1 + \lambda_1\ N_0 &= 0 \\ N_2 - \lambda_2\ N_1 + \mu_2\ N_0 &= 0 \\ -N_3 + \lambda_3\ N_2 - \mu_3\ N_1 \qquad &= 0 \\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Um z. B. Z_3 und N_3 hieraus zu berechnen, multiplizieren wir die Gleichungen beziehentlich mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und setzen

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_0 &= \lambda_0\ \varepsilon_0 + \mu_1\ \varepsilon_1 \\ \pi_1 &= \varepsilon_0 + \lambda_1\ \varepsilon_1 + \mu_2\ \varepsilon_2 \\ \pi_2 &= \varepsilon_1 + \lambda_2\ \varepsilon_2 + \mu_3\ \varepsilon_3 \\ \pi_3 &= \varepsilon_2 + \lambda_3\ \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Die Addition ergiebt

$$(4) \qquad -\varepsilon_3\ Z_3 + \pi_3\ Z_2 - \pi_2\ Z_1 + \pi_1\ Z_0 = \pi_0$$

Die entsprechende Gleichung für den Näherungsnenner hat rechts ε_0 statt π_0. Multiplizieren wir (4) mit $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3$, so ist der Faktor von Z_3, nämlich $-\varepsilon_3\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3$, nach §. 3, VII gleich $-\varepsilon_3\ \varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 = \varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$. Demnach erhalten wir für Z_3 und N_3 die Determinanten

$$Z_3 = \frac{\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3}{\varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3},\quad N_3 = \frac{\varepsilon_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3}{\varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3}$$

Der letzte Faktor π_3 darf nach (3) das 3te Glied $\mu_4\ \varepsilon_4$ nicht enthalten. Diese Einschränkung fällt fort, wenn wir die Quotienten an letzter Stelle mit ε_4 erweitern.

Z_3 geht dann über in $\dfrac{\pi_0 \ldots \pi_3\ \varepsilon_4}{\varepsilon_0 \ldots\ldots \varepsilon_4}$ und N_3 in $\dfrac{\varepsilon_0\ \pi_1 \ldots \pi_3\ \varepsilon_4}{\varepsilon_0 \ldots\ldots \varepsilon_4}$

Die Faktoren π_i in diesen Determinanten sind definiert durch

$$\pi_i = \varepsilon_{i-1} + \lambda_i\ \varepsilon_i + \mu_{i+1}\ \varepsilon_{i+1} \qquad (i \geqq 1)$$

Die Determinanten für N_i und Z_i sind hiernach leicht anzugeben.

II. Wenn $y_1, \ldots, y_n$ explicite gegebene Funktionen von $x_1, \ldots x_n$ sind, so sind deren erste Differentiale

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\, dx_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\, dx_n$$

lineare Formen der $dx_1, \ldots, dx_n$. Um nach der Methode des §. 15 die Differentiale dx durch die Differentiale dy auszudrücken, multipliziere man die Gleichungen beziehentlich mit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ und addiere sie. Ist

$$\pi = y_1\ \varepsilon_1 + \ldots + y_n\ \varepsilon_n\,,\quad \pi_k = \frac{\partial \pi}{\partial x_k} = \frac{\partial y_1}{\partial x_k}\, \varepsilon_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_k}\, \varepsilon_n,$$

so erhält man durch Addition

$$d\pi = \pi_1\ dx_1 + \ldots + \pi_n\ dx_n$$

Kürzer kann man diese Gleichung durch Differentiation von π erhalten.

Demnach ist $dx_1 = \dfrac{d\pi\ .\ \pi_2 \ldots \pi_n}{\pi_1 \ldots\ldots \pi_n}$, $dx_k = \dfrac{d\pi\ \Pi}{\Pi}$

Die gewöhnlich mit $\dfrac{\partial\,(y_1, \ldots, y_n)}{\partial\,(x_1, \ldots, x_n)}$ bezeichnete Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

erscheint hier unter der Form $\dfrac{\dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial \pi}{\partial x_n}}{\Pi}$

III. Sind die Grössen $y_1, \ldots, y_n$ implicite gegebene Funktionen der $x_1, \ldots, x_n$, so findet man die Funktionaldeterminante auf folgende Weise:

Wird die Abhängigkeit der y von der x durch die n Gleichungen

$F_1\,(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, F_n\,(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = 0$ ausgedrückt, so können diese n Gleichungen durch die eine Gleichung $\pi = 0$ ersetzt werden, wenn

$$\pi = \varepsilon_1\ F_1 + \ldots + \varepsilon_n\ F_n$$

ist. Denn aus $\pi = 0$ folgt sofort $F_1 = F_2 = \ldots = 0$, da die Grössen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ von einander unabhängig sein sollen.

Wenn unter den Variablen nur x_1 sich ändert, so ist

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \pi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi}{\partial x_1} = 0$$

Folglich erhält man n Gleichungen

$$-\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = \frac{\partial \pi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \pi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$-\frac{\partial \pi}{\partial x_n} = \frac{\partial \pi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \pi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

Die Multiplikation ergiebt

$$(-1)^n \frac{\partial \pi}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \pi}{\partial x_n} = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right| \frac{\partial \pi}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial \pi}{\partial y_n}$$

demnach, da $\pi = \varepsilon_1 F_1 + \ldots + \varepsilon_n F_n$ ist,

$$(-1)^n \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right| = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right| \left|\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\right|$$

§. 18.

Wenn eine Funktion der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch die lineare Substitution

$$(1) \quad \begin{array}{l} x_1 = c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n \end{array}$$

in eine Funktion von $y_1, \ldots, y_n$ transformiert wird unter der Bedingung, dass die Substitution eine orthogonale sei, d. h. dass

$$(2) \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2$$

sei, so lassen sich die Haupteigenschaften der Coefficienten c leicht angeben.

Aus $x_l = \sum_i c_{li} y_i$ folgt zunächst $x_l^2 = \sum_{ik} c_{li} c_{lk} y_i y_k$. Die Gleichung (2) geht daher über in

$$(3) \quad \sum_{ik} y_i y_k \sum_l c_{li} c_{lk} = \sum_i y_i^2 \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

Führt man noch die Bezeichnung ein

$$(4) \quad \sum_l c_{li} c_{lk} = \delta_{ik}$$

so muss nach (3) $\delta_{ik} = 0$ oder $= 1$ sein, je nachdem i von k verschieden oder $i = k$ ist (vergl. §. 8). Wir multiplizieren nun (4) mit e_k und summieren von $k = 1$ bis $k = n$.

Wird noch gesetzt

$$(5) \quad p_l = c_{l1} e_1 + \ldots + c_{ln} e_n$$

so erhält man links $\sum_l c_{li} p_l$, auf der rechten Seite das eine Glied $\delta_{ii} e_i = e_i$. Demnach ist

$$(6) \quad c_{i1} p_1 + c_{i2} p_2 + \ldots + c_{in} p_n = e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Durch Multiplikation der n Gleichungen (6) erhält man

$$|c_{ik}| \, p_1 \ldots p_n = E$$

Das Produkt $p_1 \ldots p_n$ ist nach (5) $= |c_{ik}| \, E$, folglich ist $|c_{ik}|^2 = 1$. Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist also 1.

Um eine zweite Eigenschaft der Coefficienten zu finden, multiplizieren wir (6) mit P_k (vergl. §. 5). Man erhält

$$c_{ki} \, p_k \, P_k \text{ oder } c_{ki} \, P = e_i \, P_k$$

Ist C_{ki} die Adjunkte von c_{ki}, so ist nach §. 7, 5 die rechte Seite gleich $C_{ki} E$, folglich ist $c_{ki} = \frac{C_{ki} E}{P}$. Hat die Determinante der Substitution den Wert δ, ($\delta = \pm 1$), so ist $P = \delta E$ und demnach $c_{ki} = \delta \, C_{ki}$.

§. 19.

Norm. Resultante. Wenn α eine der n Wurzeln der Einheit ist und $\varphi(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_{n-1} \alpha^{n-1}$, so gilt für die Norm von φ der Satz

$$N\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_1) \, \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_n)$$

$$= A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 \, \varepsilon_0 + a_1 \, \varepsilon_1 + \ldots + a_{n-1} \, \varepsilon_{n-1} \\ p_1 &= a_{n-1} \, \varepsilon_0 + a_0 \, \varepsilon_1 + \ldots + a_{n-2} \, \varepsilon_{n-1} \\ & . \quad . \quad . \quad \quad . \quad . \quad . \\ p_n &= a_1 \, \varepsilon_0 + a_2 \, \varepsilon_1 + \ldots + a_0 \, \varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$

multiplizieren die Gleichungen beziehentlich mit $1, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots, \alpha$ und addieren. Wir erhalten dann leicht die für die n Wurzeln von α geltenden Gleichungen

$$(1) \qquad p_0 + \alpha^{n-1} p_1 + \ldots + \alpha p_{n-1} = \varphi(\alpha) \, (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \, \alpha^{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \, \alpha)$$

Bezeichnet man noch mit R die nicht verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^{n-1} & . & . & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2^{n-1} & . & . & \alpha_2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n^{n-1} & . & . & \alpha_n \end{vmatrix}$$

so ergiebt die Multiplikation der n Gleichungen, die aus (1) hervorgehen, wenn man α durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ersetzt

$$p_0 \, p_1 \ldots p_{n-1} \, R = \varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_n) \, RE \text{ oder } \frac{p_0 \, p_1 \ldots p_{n-1}}{E} = \varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_n)$$

Die linke Seite ist aber die Determinante A.

Die Resultante zweier gegebenen ganzen Funktionen

$$P_m = a_0 + a_1 \, x + \ldots + a_m \, x^m, \; Q_n = b_0 + b_1 \, x + \ldots + b_n \, x^n$$

ist eine Determinante ihrer Coefficienten, deren Verschwinden die Existenz eines gemeinschaftlichen Divisors beider Funktionen anzeigt.

Haben P_m und Q_n einen gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades, so kann man die

unbestimmten Coefficienten der beiden ganzen Funktionen φ_{m-1} und ψ_{n-1} vom Grade $m-1$ und $n-1$ so bestimmen (nach Weierstrass, Vorlesungen über Funktionentheorie), dass die Gleichung besteht

$$(1) \qquad \frac{P_m}{Q_n} = -\frac{\varphi_{m-1}}{\psi_{n-1}} \text{ oder } P_m\,\psi_{n-1} + Q_n\,\varphi_{m-1} = 0$$

Wenn aus dieser Gleichung die Funktionen φ und ψ bestimmt werden können, so haben P und Q einen gemeinschaftlichen Divisor ersten oder höheren Grades.

Wir setzen wie oben

$$P_m = \sum_{r=0}^{m} a_r\,x^r \text{ und } Q_n = \sum_{s=0}^{n} b_s\,x^s$$

ferner

$$(2) \qquad \varphi_{m-1} = \sum_{r=0}^{m} d_r\,x^r\,;\; \psi_{n-1} = \sum_{s=0}^{n} c_s\,x^s;\; d_m = 0;\; c_n = 0$$

Die beiden letzten Bestimmungen sind hinzuzufügen, weil die Reihen nur bis zum Grade $m-1$ und $n-1$ aufsteigen sollen.

Dann ist

$$(3) \qquad P_m\,\psi_{n-1} + Q_n\,\varphi_{m-1} = \sum_{r,s} (a_r\,c_s + b_s\,d_r)\,x^{r+s} = 0$$

Die Gleichung soll richtig bleiben für beliebige Werte von x, muss also auch noch Gültigkeit haben, wenn man x^{r+s} durch ε_{r+s} ersetzt.

Die Gleichung geht dann über in

$$(4) \; c_0 \Sigma a_r\,\varepsilon_r + c_1 \Sigma a_r\,\varepsilon_{r+1} \ldots + c_{n-1} \Sigma a_r\,\varepsilon_{r+n-1} + d_0 \Sigma b_s\,\varepsilon_s + \ldots + d_{m-1} \Sigma b_s\,\varepsilon_{s+m-1} = 0$$

Durch Einführung der $m+n$ Summen

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0\,\varepsilon_0 + \ldots + a_m\,\varepsilon_m & q_0 = b_0\,\varepsilon_0 + \ldots + b_n\,\varepsilon_n \\ p_1 = a_0\,\varepsilon_1 + \ldots + a_m\,\varepsilon_{m+1} & q_1 = b_0\,\varepsilon_1 + \ldots + b_n\,\varepsilon_{n+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_{n-1} = a_0\,\varepsilon_{n-1} + \ldots + a_m\,\varepsilon_{m+n-1} & q_{m-1} = b_0\,\varepsilon_{m-1} + \ldots + b_n\,\varepsilon_{n+m-1} \end{array}$$

erhält (4) die Form

$$(5) \qquad c_0\,p_0 + \ldots + c_{n-1}\,p_{n-1} + d_0\,q_0 + \ldots + d_{m-1}\,q_{m-1} = 0$$

Wie in den §§. 15 und 16 schliesst man aus dieser Gleichung, da nicht alle Coefficienten c und d null sein dürfen, dass das Produkt $p_0 \ldots p_{n-1}\,q_0 \ldots q_{m-1}$ null sein muss, und dass umgekehrt, wenn dieses Produkt verschwindet, auch die Gleichungen (5) und (3) durch geeignete Wahl der c und d befriedigt werden können. Die gesuchte Resultante der P und Q ist also die Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades

$$(6) \qquad R = \frac{p_0 \ldots p_{n-1}\;q_0 \ldots q_{m-1}}{\varepsilon_0 \ldots\ldots\ldots \varepsilon_{m+n}}$$

Sollen P_m und Q_n einen gemeinschaftlichen Divisor zweiten Grades haben, so müssen die Coefficienten von 2 ganzen Funktionen φ_{m-2} und ψ_{n-2} vom Grade $m-2$ resp. $n-2$ so bestimmt werden können, dass die Gleichung erfüllt wird

$$\frac{P_m}{Q_n} = -\frac{\varphi_{m-2}}{\psi_{n-2}}$$

Um die Bedingungen für die Existenz von φ_{m-2} und ψ_{n-2} zu erhalten, ersetzen wir die Gleichungen (2) durch

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi_{m-2} = \sum_{r=0}^{m} d_r\, x^r\,,\ \psi_{n-2} = \sum_{s=0}^{n} c_s\, x^s \\ d_{m-1} = d_m = c_{n-1} = c_n = 0 \end{cases}$$

Verfährt man wie oben, so ergiebt sich die Gleichung

$$(8) \qquad c_0\, p_0 + \ldots + c_{n-2}\, p_{n-2} + d_0\, q_0 + \ldots + d_{m-2}\, q_{m-2} = 0$$

welche an die Stelle von (5) tritt.

Die Funktionen φ_{m-2} und ψ_{n-2} existieren, wenn das Produkt $p_0 \ldots p_{n-2}\, q_0 \ldots q_{m-2}$ null ist.

Das Produkt enthält $m+n-2$ Faktoren p und q und $m+n-1$ Grössen ε, es fehlt ε_{m+n-1}. Deshalb liefert das Produkt, durch das Produkt $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{m+n-2}$ dividiert, keine Determinante. Um die Bedingungen durch das Verschwinden von Determinanten auszudrücken, multiplizieren wir die Gleichung

$$(9) \qquad p_0 \ldots p_{n-2}\, q_0 \ldots q_{m-2} = 0$$

mit $p_{n-1}\, q_{m-1}$, wir finden dann zunächst wieder, dass die Resultante R verschwinden muss.

Multiplizieren wir (8) mit ε_0, so ist

$$(10) \qquad R' = \frac{\varepsilon_0\, p_0 \ldots p_{n-2}\, q_0 \ldots q_{m-2}}{\varepsilon_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon_{m+n-2}}$$

die Determinante $(m+n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche ebenfalls verschwinden muss.

Man könnte vermuten, dass man den Bedingungen $R = 0$ und $R' = 0$ noch hinzufügen müsse, dass auch andere Determinanten verschwinden, die aus R' hervorgehen, wenn man ε_0 durch eine beliebige andere Grösse ε ersetzt. Doch lässt sich ähnlich wie im §. 16 nachweisen, dass Gleichung (8) erfüllt ist, wenn R und R' gleichzeitig null sind.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein eines gemeinschaftlichen Divisors zweiten Grades der Funktionen P und Q sind also $R=0$ und $R'=0$.

Ist ausser R und R' auch noch die Determinante $(m+n-2)^{\text{ten}}$ Grades

$$R'' = \frac{\varepsilon_0\ \varepsilon_1\ p_0 \ldots p_{n-3}\ q_0 \ldots q_{m-3}}{\varepsilon_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon_{m+n-3}}$$

null, so haben P_m und Q_n einen gemeinschaftlichen Faktor 3ten Grades.

§. 20.

Die binäre Form $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$a_0\, x^{2n-1} + \binom{2n-1}{1} a_1\, x^{2n-2}\, y + \ldots + a_n\, y^{2n-1}$$

kann durch n Glieder, $(2n-1)^{\text{te}}$ Potenzen binärer Formen ersten Grades, ausgedrückt werden. (Kanonische Form nach Sylvester), nämlich durch

$$b_1\, (x + \alpha_1\, y)^{2n-1} + b_2\, (x + \alpha_2\, y)^{2n-1} + \ldots + b_n\, (x + \alpha_n\, y)^{2n-1}$$

Die Grössen b und α werden aus den $2\,n$ Gleichungen bestimmt

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} a_0 & = b_1 & + \ldots + b_n \\ a_1 & = b_1\, \alpha_1 & + \ldots + b_n\, \alpha_n \\ . \quad . & . & . \quad . \quad . \\ a_{2n-1} & = b_1\, \alpha_1^{2n-1} & + \ldots + b_n\, \alpha_n^{2n-1} \end{array}$$

Dasselbe System von Gleichungen erhält man beim Beweis der Gaussischen Näherungsformel

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = b_1 f(\alpha_1) + b_2 f(\alpha_2) + \dots + b_n f(\alpha_n)$$

Wenn man nämlich in diese Gleichung einführt

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots$$

dementsprechend auf der rechten Seite

$$f(\alpha_i) = \lambda_0 + \lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \alpha_i^2 + \dots$$

und die Bedingung stellt, dass die Coefficienten von $\lambda_0, \dots, \lambda_{2n-1}$ auf beiden Seiten von (2) einander gleich sein sollen, so ergiebt sich für den Abscissen α und die Coefficienten b das Gleichungssystem (1). Für a_i ist der specielle Wert $\int_{-1}^{+1} x^i\,dx$ einzusetzen.

Multipliziert man zunächst die erste der Gleichungen (1) mit ε_0 und die n folgenden beziehentlich mit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, darauf die zweite mit ε_0 und die n folgenden mit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ u. s. w., so erhält man, wenn man noch einführt

$$q_i = \varepsilon_0 + \alpha_i \varepsilon_1 + \dots + \alpha_i^n \varepsilon_n$$

das System von n Gleichungen

$$\begin{array}{l}
a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n = b_1 q_1 + \dots + b_n q_n \\
a_1 \varepsilon_0 + a_2 \varepsilon_1 + \dots + a_{n+1} \varepsilon_n = b_1 \alpha_1 q_1 + \dots + b_n \alpha_n q_n \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n-1} \varepsilon_0 + a_n \varepsilon_1 + \dots + a_{2n-1} \varepsilon_n = b_1 \alpha_1^{n-1} q_1 + \dots + b_n \alpha_n^{n-1} q_n
\end{array}$$

Wir fügen dieser Gleichung noch eine $(n+1)^{\text{te}}$ hinzu, worin die Zahlgrössen $z, u_1, u_2, \dots, u_n$ noch näher zu bestimmen sind

$$(2) \qquad \varepsilon_0 + z \varepsilon_1 + \dots + z^n \varepsilon_n = u_1 q_1 + \dots + u_n q_n$$

Bei der Multiplikation dieser $n+1$ Gleichungen erhält man rechts null, da das Produkt aus $n+1$ Faktoren nur n Grössen q enthält; links ergiebt sich $A\,\varepsilon_0 \dots \varepsilon_n$. Wir erhalten also zunächst für z die Gleichung n^{ten} Grades

$$(3) \qquad A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \cdot & \cdot & a_{2n-1} \\ 1 & z & \cdot & \cdot & z^n \end{vmatrix} = 0$$

Damit die Gleichung (2) bestehen kann, müssen die Coefficienten von $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ auf beiden Seiten einander gleich sein. Demnach sind $n+1$ Gleichungen zu erfüllen

$$\begin{array}{l}
b_1 u_1 + \dots + b_n u_n - 1 = 0 \\
b_1 \alpha_1 u_1 + \dots + b_n \alpha_n u_n - z = 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
b_1 \alpha_1^n u_1 + \dots + b_n \alpha_n^n u_n - z^n = 0
\end{array}$$

Ihr Zusammenbestehen erfordert das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot\ \cdot & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdot\ \cdot & \alpha_n & z \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1{}^n & \alpha_2{}^n & \cdot\ \cdot & \alpha_n{}^n & z^n \end{vmatrix}$$

Um den Wert dieser Determinante zu ermitteln, so setze man

$$\varphi(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots \ldots (z - \alpha_n)$$

multipliziere die erste Zeile mit a_n, die zweite mit a_{n-1} u. s. w., die vorletzte mit a_1 und addiere sie zur letzten. Wegen $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2) = \ldots = 0$ verschwinden alle Elemente der letzten Zeile ausser dem letzten, welches in $\varphi(z)$ übergeht. Ist C die zu z^n gehörende Subdeterminante, so ist demnach die Determinante $= C\varphi(z) = C(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)$. Da C von z unabhängig ist und nur dann null wird, wenn 2 Grössen α einander gleich sind, so kann die Determinante im allgemeinen nur verschwinden, wenn eine der Grössen α einen der n Werte von z annimmt, die der Gleichung (3) genügen. Deshalb sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $A = 0$. Die Grössen $b_1, \ldots, b_n$ bestimmt man aus den ersten n Gleichungen (1). In der Gaussischen Näherungsformel sind die Abscissen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung

$$A = \begin{vmatrix} \int dx & \int x\,dx & \cdot\ \cdot & \int x^n\,dx & 1 \\ \int x\,dx & \int x^2\,dx & \cdot\ \cdot & \int x^{n+1}\,dx & z \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\ \int x^n\,dx & \int x^{n+1}\,dx & \cdot\ \cdot & \int x^{2n-1}\,dx & z^n \end{vmatrix} = 0$$

Sämtliche Integrale sind zwischen den Grenzen -1 und $+1$ zu nehmen. Addiert man sämtliche Zeilen zur letzten, nachdem man sie beziehentlich mit den unbestimmten Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ multipliziert hat und setzt noch

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

so sind die Elemente der letzten Zeile

$$\int f(x)\,dx\,,\ \int x\,f(x)\,dx\,, \ldots,\ \int x^{n-1} f(x)\,dx\,,\ f(z)$$

Kann man $f(x)$ so bestimmen, dass die ersten $n-1$ Glieder dieser Reihe verschwinden, so geht A über in das Produkt von $f(z)$ mit einem konstanten Faktor und demnach sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$. Bekanntlich ist $f(z) =$ der Kugelfunktion $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dz^n}$

